ارائهٔ چند دست‌سازهٔ ریاضی برای ارتقای درک دانش‌آموزان از مفهوم

نسبت طلایی

مرضیه سعید
مدرس دانشگاه فرهنگیان کازرون
عبدالرحمن شهیدزاده
مدرس دانشگاه سلمان فارسی کازرون

چکیده
برای تدریس معنادار ریاضی، می‌باید ارتباط بین مفاهیم ریاضی و زمینه‌های شهودی دانش‌آموزان، از جمله دنیای واقعی، دانش ریاضی خارج از مدرسه، دانسته‌ها و تجربه‌های قبلی و نیز فرهنگ جامعه، علاقه‌های آن‌ها و ... را در نظر گرفت و آن‌ها را در فرایند آموزش دخیل کرد. دنباله‌ها و الگوها از مباحث مهم و پایه‌ای ریاضیات هستند و عددهای فیبوناتچی و «نسبت طلایی» از جذابیت‌های این مبحث به شمار می‌روند. از این رو در مقالهٔ حاضر سعی شده است با ارائهٔ چند دست‌سازهٔ ریاضی به آموزش مفاهیم دنبالهٔ فیبوناتچی و نسبت طلایی پرداخته شود که ارائه این جذابیت‌ها و فرصت کشف، باعث تقویت انگیزهٔ یادگیری مفاهیم مربوط به دنباله‌ها، درک ریاضی و توانایی کشف و مدل‌سازی دانش‌آموزان می‌شود و به آن‌ها در فراگیری معنادار ریاضی کمک می‌کند.

کلیدواژه‌ها: آموزش اکتشافی، شهود، دست‌سازهٔ ریاضی، دنبالهٔ فیبوناتچی، نسبت طلایی

الف) نسبت طلایی و دنبالهٔ فیبونانچی

پاره‌خطی را در نظر بگیرید و فرض کنید که آن را به‌گونه‌ای تقسیم کنید که نسبت پاره‌خط بزرگ به کوچک معادل نسبت کل پاره‌خط به قسمت بزرگ باشد. در این صورت این نسبت را که عدد گنگ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است، «نسبت طلایی» گوییم، با نماد ϕ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

اگر ضلع کوچک را یک واحد در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}\xrightarrow{b=1}\frac{a+1}{a}=\frac{a}{1}\rightarrow a^2=a+1$$

$$\rightarrow a^2-a-1=0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\xrightarrow{a>1}a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

از آنجا که نسبت طلایی عددی گنگ است، حداقل طول یکی از پاره‌خط‌های بالا گنگ است. در ریاضیات دنبالهٔ فیبوناتچی به دنباله‌ای از عددها می‌گویند که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ 1 & n=1\\ F(n-1)+F(n-2) & n\geq 2\end{cases}$$

اولین عددهای این دنباله عبارت‌اند از:

$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots$

ب) معرفی چند دست‌سازهٔ ریاضی و شیوهٔ به‌کارگیری آن‌ها در آموزش مفهوم نسبت طلایی

با توجه به تحقیقات در زمینهٔ فعالیت‌های عملی برای آموزش نسبت طلایی، موردی عملی برای آموزش این مبحث به‌صورت دست‌سازهٔ ریاضی، در آموزش این مبحث یافته نشد. لذا با توجه به مشاهدهٔ بی‌انگیزگی دانش‌آموزان در مطالعهٔ درس ریاضی و بی‌علاقگی آن‌ها به انتخاب رشتهٔ ریاضی، سعی بر آن شد که با معرفی جذابیت‌های ریاضی در قالب استفاده از دست‌سازه‌ها و بازی‌های ریاضی و استفاده از مطالب عینی با رویکرد یادگیری اکتشافی، دست‌سازه‌هایی بدیع در این خصوص طراحی شوند که می‌توانند در امر آموزش مفهوم نسبت طلایی در سه دورهٔ ابتدایی، متوسطهٔ اول و متوسطهٔ دوم، متناسب با سطح دانش‌آموزان، مؤثر واقع شوند و به دنبال آن، انگیزهٔ یادگیری مفاهیم مربوط به الگوها و دنباله‌ها در دانش‌آموزان تقویت شود. در ادامه به معرفی چهار دست‌سازه در این زمینه می‌پردازیم:

۱. مستطیل طلایی، زاویهٔ طلایی و مثلث طلایی

مستطیل طلایی: اگر در یک مستطیل نسبت طول به عرض نسبت طلایی باشد، آن را مستطیل طلایی می‌نامند.

زاویهٔ طلایی: اگر محیط دایره‌ای را به دو بخش تقسیم کنیم، به‌طوری که نسبت بخش بزرگ‌تر به بخش کوچک‌تر همان نسبت طلایی باشد، زاویهٔ مرکزی مقابل به بخش کوچک‌تر را ـ که زاویه‌ای گنگ و تقریباً ۱۳۷/۵ درجه است ـ «زاویهٔ طلایی» می‌نامیم.

مثلث طلایی: اگر در یک مثلث متساوی‌الساقین نسبت طول ساق‌ها به طول قاعدهٔ آن، نسبت طلایی باشد، آن مثلث را «مثلث طلایی» می‌گوییم. در این مثلث اندازهٔ زاویهٔ مجاور به دو ساق آن ۷۲ درجه است.

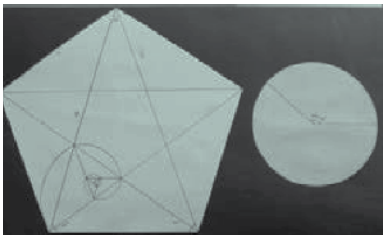
دست‌سازهٔ شمارهٔ ۱ شامل یک صفحهٔ مستطیل شکل خاکستری (با نسبت طلایی ابعاد) است که سه قسمت مجزا در آن مشاهده می‌شود:

۱. در لبهٔ بالایی مستطیل (طول آن) پاره‌خطی مشاهده می‌شود که به دو قسمت سفید و سیاه متناسب با نسبت طلایی تقسیم شده است.

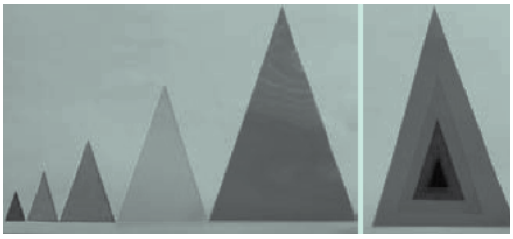
۲. در قسمت سمت راست، دایره‌ای سفیدرنگ مشاهده می‌شود که زاویهٔ طلایی در آن مشخص شده است.

۳. در قسمت سمت چپ پنج‌ضلعی مشاهده می‌شود که قطرهای آن رسم شده است (شکل ۱).

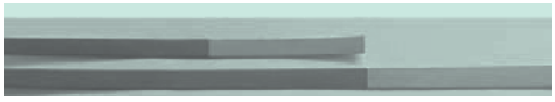
همچنین این دست‌سازه شامل پنج مثلث طلقی متشابه با اندازه‌های متفاوت (شکل ۲) و دو نوار مقوایی کوچک و بزرگ است (که متناسب با نسبت طلایی به دو بخش تقسیم شده‌اند



شکل ۱



شکل ۲



نوارهای کاغذی شمارهٔ ۱
نوارهای کاغذی شمارهٔ ۲

شکل ۳

و نوار کوچک‌تر به اندازهٔ بخش نوار بزرگ‌تر است) (شکل ۳).

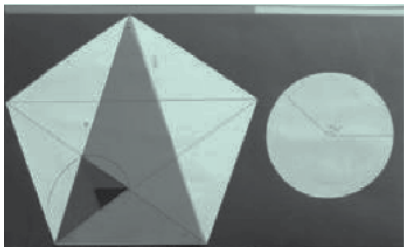
الف. شناخت نسبت طلایی: از دانش‌آموزان می‌خواهیم به کمک خط‌کش، طول بخش‌های سفید و سیاه را در نوارهای کاغذی شمارهٔ ۱ و ۲ اندازه‌گیری کنند و نسبت بخش سفید به سیاه را به‌دست آورند. آن‌ها مشاهده می‌کنند که نسبت پاره‌خط‌ها تقریباً ۱/۶۱۸، یعنی همان عدد فی یا نسبت طلایی است و عملاً این نسبت را به‌طور شهودی درک می‌کنند و معیاری تقریبی در مورد نسبت طلایی به‌دست می‌آورند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ضلع بالایی مستطیل در شکل ۱، متناسب با نسبت طلایی به دو قسمت سفید و سیاه تقسیم شده است. حال از دانش‌آموزان می‌خواهیم به کمک نوارهای شمارهٔ ۱ و ۲ (شکل ۳) بررسی کنند که نسبت طلایی در مستطیل رعایت شده است یا خیر. به این طریق با مستطیل طلایی نیز آشنا می‌شوند و به معیاری تقریبی در مورد ابعاد این مستطیل می‌رسند.

ب. شناخت زاویهٔ طلایی: از دانش‌آموزان می‌خواهیم نوار کاغذی شمارهٔ ۲ را که متناسب با نسبت طلایی است، روی محیط دایرهٔ سمت راست قرار دهند و مشاهده کنند که بخش کوچک‌تر (سبزرنگ) مقابل به زاویهٔ مرکزی ۱۳۷/۵ درجه (زاویهٔ طلایی) است. در دست‌سازهٔ شمارهٔ ۴ از این زاویهٔ طلایی استفاده خواهند کرد و آن را در طبیعت بهتر خواهند شناخت.

ج. نسبت طلایی در پنج‌ضلعی: نوار کاغذی شمارهٔ ۲ را در پنج‌ضلعی به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که بخش سیاه روی ضلع سمت راست بالایی آن به اندازهٔ یک واحد و بخش سفیدرنگ آن روی قطر سفیدرنگ منطبق شود. به‌وضوح مشاهده می‌شود که

نسبت قطر پنج‌ضلعی به ضلع آن عدد طلایی است. حال نوار کاغذی شمارهٔ ۱ را به‌گونه‌ای در پنج‌ضلعی قرار می‌دهیم که بخش روی همان ضلع پنج‌ضلعی و بخش آن روی پاره‌خط قرار گیرد که در این صورت نسبت طلایی در این اجزا نیز مشاهده می‌شود.

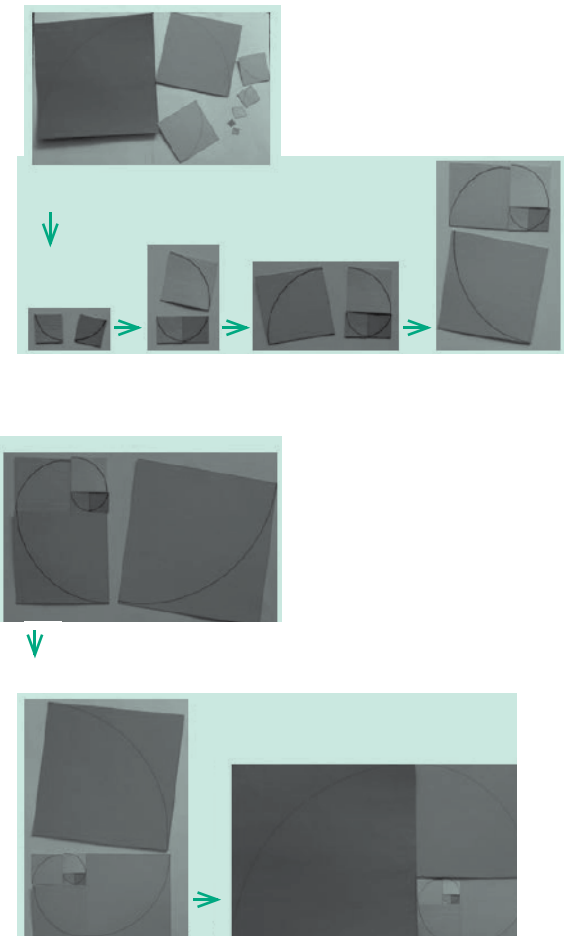
د. شناخت مثلث طلایی: همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ ضلع پایینی پنج‌ضلعی و زاویه‌های مساوی ۷۲ درجه شکل گرفته است. درون آن مثلثی متشابه و کوچک‌تر قرار دارد و این روند بی‌انتها تکرار می‌شود. برای مشاهدهٔ این مثلث‌ها و روند تغییر و ایجاد مارپیچ طلایی، بزرگ‌ترین مثلثی را که با طلق شفاف درست شده است (شکل ۲)، روی مثلث اولیه می‌گذاریم. سپس مثلث خاکستری کم‌رنگ و به همین ترتیب مثلث‌های پررنگ‌تر را (همگی متشابه هستند)، قرار می‌دهیم. مارپیچ طلایی در این مثلث‌ها نیز مشهود است (شکل ۴).



شکل ۴

۲. پازل طلایی ۱ (مارپیچ برون‌گرا)

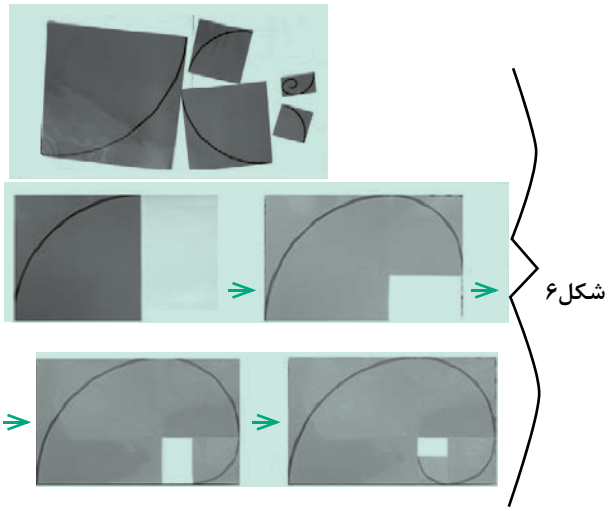
ابتدا مربع‌هایی به طول ضلع جمله‌های «دنبالهٔ فیبوناتچی» (۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ و ۱۳ و ۲۱ و ...) روی مقوا با رنگ‌های متفاوت برش می‌دهیم که پشت آن‌ها عددهای متناظر نوشته شده‌اند. روی آن‌ها منحنی‌هایی رسم می‌کنیم، به‌طوری که از کنار هم قرار دادن آن‌ها مارپیچ فیبوناتچی حاصل شود. اکنون از دانش‌آموزان می‌خواهیم، مربع‌ها را از کوچک به بزرگ به ترتیبی کنار هم قرار دهند که مارپیچی ساخته شود که درواقع همان مارپیچ فیبوناتچی است (شکل ۵). همچنین از آن‌ها می‌خواهیم پس از قرار دادن هر مربع، نسبت طول به عرض مستطیل ساخته شده را که درواقع نسبت دو جملهٔ متوالی دنبالهٔ فیبوناتچی است، محاسبه و یادداشت کنند. در پایان کار می‌باید نسبت‌های به دست آمده را به‌صورت دنباله‌ای از عددها بنویسند و حدس بزنند که این دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود. در نهایت با معرفی عدد فی به آن‌ها می‌گوییم که دنبالهٔ مذکور به این عدد که همان عدد طلایی است، نزدیک می‌شود و مستطیل‌های تشکیل شده در هر مرحله به مستطیل طلایی نزدیک می‌شوند.



شکل ۵

۳. پازل طلایی ۲ (مارپیچ درون‌گرا)

در این فعالیت ابتدا مستطیلی طلایی ابعاد دلخواه در اختیار دانش‌آموزان می‌گذاریم. سپس از آن‌ها می‌خواهیم، در هر مرحله مربع‌های از پیش‌تهیه شده را طوری روی مستطیل قرار دهند که ضلع مربع بر عرض مستطیل منطبق و مارپیچ طلایی ساخته شود (شکل ۶). این عمل را می‌توان به دفعات دلخواه انجام داد. در هر مرحله از دانش‌آموزان می‌خواهیم نسبت طول به عرض مستطیل‌های خالی را تشکیل دهند و یادداشت کنند و بگویند این نسبت‌ها بیانگر چه عددی هستند. به کمک دست‌سازهٔ مزبور دانش‌آموزان متوجه این ویژگی مستطیل طلایی می‌شوند که اگر مربعی به اندازهٔ عرض مستطیل از آن جدا کنیم، مستطیل حاصل نیز یک مستطیل طلایی خواهد بود و این روند بی‌انتها ادامه خواهد داشت.

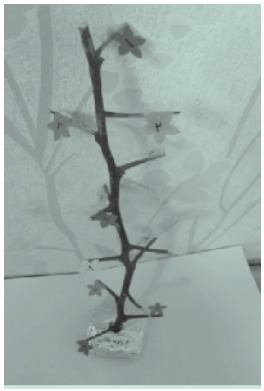


شکل ۶

۴. زاویهٔ طلایی در طبیعت

زاویهٔ طلایی در بسیاری از پدیده‌های طبیعی از جمله رویش برگ‌ها روی ساقهٔ گیاهان و ... مشاهده می‌شود. گیاهان در مسیر تکاملی خود به سمت ساختاری می‌روند که به کمک آن بتوانند، بیشترین جذب نور خورشید را داشته باشند، به میزان بهینهٔ «فتوسنتز» برسند، و بدین‌وسیله بهترین دریافت کربن را داشته باشند. مزیت این «فیلوتاکسی» (واژهٔ یونانی به معنی آرایش برگی)، علاوه بر بهینه‌سازی فضای برگ‌ها، این است که هیچ برگی موازی برگ بالایی قرار نمی‌گیرد و چیدمانی صورت می‌گیرد که هم‌زمان همهٔ برگ‌ها بیشینهٔ جذب نورشان را دارند.

ویژگی دیگر چنین چیدمانی این است که هنگام باران، آب به‌صورت مستقیم به سمت ریشه راهنمایی می‌شود. این موضوع باعث جذب حداکثر میزان آب برای گیاه می‌شود. دست‌سازهٔ حاضر قطاعی از دایره با زاویهٔ ۱۳۷/۵ درجه است که می‌خواهیم به کمک آن زاویهٔ میان هر دو شاخه در محل رویش ساقه‌های گیاهان را اندازه‌گیری کنیم (شکل ۷). می‌توان از دانش‌آموزان خواست به‌صورت گروهی این قطاع را بسازند و هر گروه تعدادی ساقهٔ گیاه از انواع متفاوت را همراه داشته باشد. برای راحتی می‌توان شاخه‌های موجود روی ساقهٔ گیاه را شماره‌گذاری کرد تا اندازه‌گیری راحت‌تر انجام شود (شکل ۸).



شکل ۷

شکل ۸

ج)نتیجه‌گیری و پیشنهاد

استفاده از مثال‌های شهودی و دست‌سازه‌ها در کنار مثال‌های ریاضی، باعث تقویت انگیزه و یادگیری مفاهیم ریاضی توسط دانش‌آموزان می‌شود. برای نیل به این هدف، می‌باید کلاس از حالت سخنرانی خارج و به کلاس عمل و تجربه تبدیل شود تا دانش‌آموز بتواند فعالیت‌های عملی انجام دهد و به یادگیری بپردازد. در این صورت دانش‌آموزان می‌توانند فکر کنند، با دست‌هایشان کار کنند و مغز خود را به‌کار بیندازند. هنر نیز می‌تواند دریچه‌ای جدید برای دانش‌آموزان باز کند تا ریاضیات را از دیدگاه متفاوتی ببینند و مفاهیم را عمیق‌تر درک کنند. فعالیت‌های مبتنی بر عمل، دانش‌آموزان را به میدان می‌آورد و هنر این فرایند را آسان می‌کند. پیشنهاد می‌شود دبیران محترم در آموزش مفاهیم ریاضی، مانند نسبت طلایی و به‌کارگیری دست‌سازه‌های فوق، سعی در آسان‌سازی مفاهیم انتزاعی داشته باشند تا دانش‌آموزان را در فرایند یادگیری با خود همراه سازند.

منابع

۱. بیژن‌زاده، محمدحسن (۱۳۹۳). آموزش و یادگیری ریاضیات. انتشارات خردمندان. تهران.

۲. تیموری، قاسم (۱۳۸۸). طراحی و ساخت دست‌سازه‌های جبری. انتشارات مؤسسهٔ فرهنگی منادی تربیت. تهران.

۳. تیموری، قاسم (۱۳۸۱). مقدمه‌ای بر روش تدریس ریاضی. انتشارات مؤسسهٔ فرهنگی منادی تربیت. تهران.

۴. لطفی، مریم؛ شمس دیلمی، هاجر؛ اکبرشاهی، اعظم؛ علیجانی، زهرا (۱۳۸۲). تأثیر شگفتی‌ها و جنبه‌های کاربردی ریاضیات در آموزش. مجموعه مقالات منتخب پنجمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران. انتشارات عابد.

۵. موسوی موحدی، فائزه (۱۳۹۵). چشم‌اندازی به عدد طلایی فی. نشریهٔ نشاء علم. سال هفتم. شمارهٔ اول.

6. J. Gainsburg (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. Journal of Mathematics Teacher Education.pp 199- 219.

7. National Council of Teachers of Mathematics (2010). Standards for School Mathematic Connections, Retrieved October 18, 2010, from National Council of Teachers of Mathematics. Web site: http://www.nctm.org.

8. R. Reys (1984). Helping Children Learn Mathematics. Wiley.United States.